Ueber die Unsicherheit

einer

Bahnbestimmung der kleinen Planeten

aus vier Beobachtungen.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 17. Mai 1893

VON

Hans Paetsch

aus Berlin.

OPPONENTEN:

Herr K. Necker, cand. math. et astron.
- H. Harting, Dr. phil. Astronom.
- A. Berberich, Astronom a. Recheninstitut d. Kgl. Sternwarte.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

Linienstr. 158.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. F. Tietjen

Dirigent des Recheninstituts der Königlichen Sternwarte zu Berlin

in dankbarer Hochachtung

gewidmet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535707_0264

Einleitung.

Im Jahre 1869 ist von Herrn Professor Dr. Tietjen in den astronomischen Nachrichten eine Arbeit „über die Unsicherheit einer Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wenn dieselben geocentrisch nahe in einem grössten Kreise liegen“ veröffentlicht worden. In Hinblick auf diese Arbeit wurde mir von Herrn Professor Tietjen die Anregung zu Theil, eine ähnliche Betrachtung auf eine Bahnbestimmung der kleinen Planeten aus 4 Beobachtungen auszudehnen.

Von vornherein möchte ich bemerken, dass die ganze Untersuchung nur approximativ geführt ist, wie es auch ja leicht ersichtlich ist, dass eine strenge Durchführung auf sehr grosse Schwierigkeiten stossen würde. Für eine erste Bahnbestimmung giebt sie jedoch einen hinreichenden Ueberblick und die Resultate dürften infolgedessen in mancher Hinsicht von Interesse sein. Der Schwerpunkt der Bahnbestimmung liegt offenbar in der Bestimmung der geocentrischen Distanz Δ, wofür durchgehends die Projection $\varrho = \Delta \cos \beta$ eingeführt worden ist, und ich habe nun zu ermitteln versucht, wann diese Distanz sich nicht mehr bestimmen lässt.

In dem ersten Theil soll nun gezeigt werden, dass diese Bestimmung der geocentrischen Distanz vollständig unabhängig von den Zwischenzeiten ist. Nachdem dann die Bestimmungsgleichung für ϱ noch etwas vereinfacht wurde, ist der zweite Theil dieser Arbeit lediglich der Untersuchung gewidmet, unter welchen Umständen ϱ nicht zu bestimmen ist. Dabei werden sich einige interessante Relationen zwischen der halben grossen Axe und der Excentricität ergeben, die schon einen allgemeinen Ueberblick gewähren, für welche Planeten überhaupt eine Zeit existirt, die eine Bahnbestimmung aus 4 Beobachtungen unmöglich machen kann.

Zum Schluss ist versucht, die Grenzen zu bestimmen, innerhalb derer diese Zeit liegt. Als Beispiel sind dann 4 Normalörter eines Planeten gebildet, die den praktischen Beweis für vorstehende Untersuchung liefern.

I.

1. **Aufstellung der Grundformeln.** Es seien die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten eines Planeten für eine Beobachtung mit $x\,y\,z$, für eine zweite, dritte und vierte Beobachtung mit $x_1\,y_1\,z_1$, $x_1^0\,y_1^0\,z_1^0$, $x_2\,y_2\,z_2$ bezeichnet. Dann hat man die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \Delta\cos\beta\cos\lambda - R\cos\odot\cos B \\ y &= \Delta\cos\beta\sin\lambda - R\sin\odot\cos B \\ z &= \Delta\sin\beta - R\sin B \end{aligned}$$

wo $\Delta\,\beta\,\lambda$ die geocentrische Entfernung, Breite und Länge des Planeten in Bezug auf die Ekliptik sind; $R\,B\,\odot$ die entsprechenden Grössen der Sonne.

Ganz analog hat man die Gleichungen für die zweite, dritte und vierte Beobachtung.

Setzt man ferner:

$$n = \frac{r_2\,r_1\sin(v_2 - v_1)}{r_2\,r\sin(v_2 - v)};\quad n_2 = \frac{r_1\,r\sin(v_1 - v)}{r_2\,r\sin(v_2 - v)}$$

$$n^0 = \frac{r_2\,r_1^0\sin(v_2 - v_1^0)}{r_2\,r\sin(v_2 - v)};\quad n_2^0 = \frac{r_1^0\,r\sin(v_1^0 - v)}{r_2\,r\sin(v_2 - v)}$$

so hat man einerseits die Gleichungen für den ersten, zweiten und vierten Ort:

$$(2)\qquad \begin{aligned} n\,x - x_1 + n_2\,x_2 &= 0 \\ n\,y - y_1 + n_2\,y_2 &= 0 \\ n\,z - z_1 + n_2\,z_2 &= 0 \end{aligned}$$

andererseits für den ersten, dritten und vierten Ort die analogen Gleichungen, wo die Coordinaten des dritten Ortes $x_1^0\,y_1^0\,z_1^0$ an Stelle von $x_1\,y_1\,z_1$ gesetzt werden.

Setzt man nun die Coordinaten von (1) für die entsprechenden in (2) ein, so bekommt man, wenn man die Sonnenbreiten — was bei der ersten Bahnbestimmung erlaubt ist — vernachlässigt, und $\varrho = \Delta\cos\beta$ setzt:

$$(3)\qquad \begin{cases} n\varrho\cos\lambda - \varrho_1\cos\lambda_1 + n_2\varrho_2\cos\lambda_2 \\ \qquad = nR\cos\odot - R_1\cos\odot_1 + n_2 R_2\cos\odot_2 \\ n\varrho\sin\lambda - \varrho_1\sin\lambda_1 + n_2\varrho_2\sin\lambda_2 \\ \qquad = nR\sin\odot - R_1\sin\odot_1 + n_2 R_2\sin\odot_2. \end{cases}$$

Führt man nun N und N_2 ein, Grössen, die dasselbe für die Erdbahn bedeuten, was n und n_2 für die Planetenbahn, also

$$N = \frac{R_2 R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1)}{R_2 R \sin(\odot_2 - \odot)}; \quad N_2 = \frac{R_1 R \sin(\odot_1 - \odot)}{R_2 R \sin(\odot_2 - \odot)},$$

so hat man die ganz entsprechenden Gleichungen, wobei auch die Sonnenbreiten vernachlässigt sind:

$$NR\cos\odot - R_1\cos\odot_1 + N_2 R_2\cos\odot_2 = 0$$
$$NR\sin\odot - R_1\sin\odot_1 + N_2 R_2\sin\odot_2 = 0$$

Durch Verbindung mit (3) ergeben diese Gleichungen:

$$n\varrho\cos\lambda - \varrho_1\cos\lambda_1 + n_2\varrho_2\cos\lambda_2 = (n-N)R\cos\odot + (n_2-N_2)R_2\cos\odot_2$$
$$n\varrho\sin\lambda - \varrho_1\sin\lambda_1 + n_2\varrho_2\sin\lambda_2 = (n-N)R\sin\odot + (n_2-N_2)R_2\sin\odot_2.$$

Hieraus findet man, wenn man noch

$$L = \odot \pm 180^0 \text{ setzt,}$$

wo also L die heliocentrische Länge der Erde in Bezug auf die Ekliptik bedeutet:

$$\text{(4a)} \quad \begin{aligned} &n\varrho\sin(\lambda_1 - \lambda) + n_2\varrho_2\sin(\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= R(N-n)\sin(\lambda_1 - L) + R_2(N_2 - n_2)\sin(\lambda_1 - L_2). \end{aligned}$$

Ganz analog findet man eine zweite Gleichung zwischen ϱ und ϱ_2, die sich aus der ersten, dritten und vierten Beobachtung ergiebt, nämlich:

$$\text{(4b)} \quad \begin{aligned} &n_0\varrho\sin(\lambda_1^0 - \lambda) + n_2^0\varrho_2\sin(\lambda_1^0 - \lambda_2) \\ &= R(N^0 - n^0)\sin(\lambda_1^0 - L) + R_2(N_2^0 - n_2^0)\sin(\lambda_1^0 - L_2). \end{aligned}$$

Schliesslich bekommt man zur Bestimmung von ϱ:

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} \varrho\,[n\,n_2^0\sin(\lambda_1 - \lambda)\sin(\lambda_1^0 - \lambda_2) \\ \qquad - n^0 n_2\sin(\lambda_1^0 - \lambda)\sin(\lambda_1 - \lambda_2)] \\ = R\,[(N-n)\sin(\lambda_1 - L)\,n_2^0\sin(\lambda_1^0 - \lambda_2) \\ \qquad - (N^0 - n^0)\sin(\lambda_1^0 - L)\,n_2\sin(\lambda_1 - \lambda_2)] \\ + R_2\,[(N_2 - n_2)\sin(\lambda_1 - L_2)\,n_2^0\sin(\lambda_1^0 - \lambda_2) \\ \qquad - (N_2^0 - n_2^0)\sin(\lambda_1^0 - L_2)\,n_2\sin(\lambda_1 - \lambda_2)]. \end{cases}$$

Durch diese Gleichung ist die Bestimmung von ϱ und im Weiteren auch die der Elemente gegeben. Da nun ϱ immer einen endlichen Werth haben muss, so wird sich die folgende Untersuchung darauf erstrecken, ob der Faktor von ϱ und infolge-

dessen auch die rechte Seite 0 werden kann. Je kleiner der Faktor von ϱ wird, desto ungenauer wird ϱ selbst; wird der Faktor $= 0$, so ist ϱ garnicht zu bestimmen. Da nun, wie schon bemerkt, wegen des bestimmten endlichen Werthes von ϱ, sein Faktor und die rechte Seite zu gleicher Zeit 0 werden muss, so wird es gleichgültig sein, welche von diesen beiden Grössen untersucht wird. Welche Wahl zu treffen ist, wird man leicht am Ende des nächsten Abschnittes einsehen, der eine Bestimmung für ϱ bei unendlich kleinen Zwischenzeiten giebt.

2. Ableitung von Differentialformeln. Es sei allgemein bezeichnet

$$\begin{aligned} &\varkappa(t_2 - t_1) = \tau; \quad \varkappa(t_2 - t) = \tau_1; \quad \varkappa(t_1 - t) = \tau_2 \\ &\varkappa(t_2 - t_1^0) = \tau^0; \qquad\qquad \varkappa(t_1^0 - t) = \tau_2^0 \end{aligned}$$

wo t, t_1, t_1^0, t_2 die vier Beobachtungszeiten und $\varkappa$ die Gauss'sche Constante bedeuten. Werden die Zwischenzeiten nur mässig angenommen, so kann man setzen:

$$(6)\quad \begin{aligned} n &= \frac{\tau}{\tau_1}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_2(\tau_1 + \tau)}{r_1^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_2(\tau_2^2 + \tau\tau_2 - \tau^2)r'}{r_1^4}\right) \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau(\tau_1 + \tau_2)}{r_1^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau(\tau^2 + \tau\tau_2 - \tau_2^2)r'}{r_1^4}\right). \end{aligned}$$

Analog werden die Gleichungen für n^0 und n_2^0 sein, wo τ^0, τ_2^0, $r_1^{0^3}$, $r_1^{0^4}$ an Stelle τ, τ_2, r_1^3, r_1^4 gesetzt werden muss.

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} + \tau_2\left(\frac{1}{r^3}\right)'; \quad \frac{1}{r_1^{03}} = \frac{1}{r^3} + \tau_2^0\left(\frac{1}{r^3}\right)',$$

so bekommt man nach Einsetzung in (6)

$$(6a)\quad \begin{cases} n = \dfrac{\tau}{\tau_1}\left[1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\tau_2(\tau_1 + \tau)}{r^3} + \left\{\dfrac{1}{6}\tau_2^2(\tau_1 + \tau) - \dfrac{1}{12}\tau_2(\tau_2^2 + \tau\tau_2 - \tau^2)\right\}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)'\right] \\ n_2 = \dfrac{\tau_2}{\tau_1}\left[1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\tau(\tau_1 + \tau_2)}{r^3} + \left\{\dfrac{1}{6}\tau\tau_2(\tau_1 + \tau_2) + \dfrac{1}{12}\tau(\tau^2 + \tau\tau_2 - \tau_2^2)\right\}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)'\right]. \end{cases}$$

$$
(6b)\quad
\begin{cases}
n^0 = \dfrac{\tau^0}{\tau_1}\left[1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\tau_2^0(\tau_1+\tau^0)}{r^3}\right. \\
\qquad \left. + \left\{\dfrac{1}{6}\tau_2^{0^2}(\tau_1+\tau^0) - \dfrac{1}{12}\tau_2^0(\tau_2^{0^2}+\tau^0\tau_2^0-\tau^{0^2})\right\}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)'\right] \\
n_2^0 = \dfrac{\tau_2^0}{\tau_1}\left[1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\tau^0(\tau_1+\tau_2^0)}{r^3}\right. \\
\qquad \left. + \left\{\dfrac{1}{6}\tau^0\tau_2^0(\tau_1+\tau_2^0) + \dfrac{1}{12}\tau^0(\tau_2^{0^2}+\tau^0\tau_2^0-\tau_2^{0^2})\right\}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)'\right].
\end{cases}
$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz kann man nun die geocentrischen Längen nach Potenzen der Zwischenzeiten entwickeln und man bekommt:

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda'\tau_2 + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2^2 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^3 + \ldots\ldots$$

$$\lambda_1^0 = \lambda + \lambda'\tau_2^0 + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2^{0^2} + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^{0^3} + \ldots\ldots$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda'\tau_1 + \frac{\lambda''}{2!}\tau_1^2 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_1^3 + \ldots\ldots$$

wo allgemein: $\lambda^{(n)} = \dfrac{d^n\lambda}{d\tau^n}$ ist.

Hieraus findet man unmittelbar:

$$\sin(\lambda_1-\lambda) = \tau_2\left[\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^2 - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau_2^2\right]$$

$$\sin(\lambda_1-\lambda_2) = -\tau\left[\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}(\tau_2+\tau_1) + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^2+\tau_2\tau_1+\tau_1^2) - \frac{\lambda'^3\tau^2}{3!}\right]$$

$$\sin(\lambda_1^0-\lambda) = \tau_2^0\left[\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2^0 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^{0^2} - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau_2^{0^2}\right]$$

$$\sin(\lambda_1^0-\lambda_2) = -\tau^0\left[\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}(\tau_2^0+\tau_1) + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^{0^2}+\tau_2^0\tau_1+\tau_1^2) - \frac{\lambda'^3\tau^{0^2}}{3!}\right]$$

und ferner wird:

$$n\sin(\lambda_1-\lambda) = \frac{\tau\tau_2}{\tau_1}\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^2 - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau_2^2 + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau_2(\tau_1+\tau)\right\}$$

$$n_2\sin(\lambda_1-\lambda_2) = -\frac{\tau\tau_2}{\tau_1}\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}(\tau_2+\tau_1)\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^2+\tau_2\tau_1+\tau_1^2) - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau^2 + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau(\tau_1+\tau_2)\right\}$$

$$n^0 \sin(\lambda_1^0 - \lambda) = \frac{\tau^0 \tau_2^0}{\tau_1}\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2^0 + \frac{\lambda'''}{3!}\tau_2^{0^2} - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau_2^{0^2} + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'\tau_2^0}{r^3}(\tau_1 + \tau^0)\right\}$$

$$n_2^0 \sin(\lambda_1^0 - \lambda_2) = -\frac{\tau^0 \tau_2^0}{\tau_1}\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}(\tau_2^0 + \tau_1) + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^{0^2} + \tau_2^0\tau_1 + \tau_1^2) - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau^{0^2} + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau^0(\tau_1 + \tau_2^0)\right\}.$$

Setzt man ferner:

$\sin(\lambda - L) = Y$, so kann man schreiben:

$$\sin(\lambda_1 - L) = Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\lambda'\tau_2$$

$$\sin(\lambda_1 - L_2) = Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\lambda'\tau_2 + \frac{\partial Y}{\partial L}L'\tau_1$$

$$\sin(\lambda_1^0 - L) = Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\lambda'\tau_2^0$$

$$\sin(\lambda_1^0 - L_2) = Y + \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\lambda'\tau_2^0 + \frac{\partial Y}{\partial L}L'\tau_1$$

Setzt man nun $\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = p$ und berücksichtigt, dass $\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial Y}{\partial L}$ ist, so kann man auch schreiben:

$$\sin(\lambda_1 - L) = Y + p\lambda'\tau_2$$
$$\sin(\lambda_1 - L_2) = Y + p\lambda'\tau_2 - pL'\tau_1$$
$$\sin(\lambda_1^0 - L) = Y + p\lambda'\tau_2^0$$
$$\sin(\lambda_1^0 - L_2) = Y + p\lambda'\tau_2^0 - pL'\tau_1.$$

Analog den n, n_2, n^0, n^0_2 werden die N, N_2, N^0, N_2^0 gebildet. Dann wird man für die Differenzen der N und n Ausdrücke von folgender Form bekommen:

$$N - n = \frac{\tau\tau_2}{6\tau_1}(\tau_1 + \tau).K + \frac{\tau}{\tau_1}\left\{\frac{1}{6}\tau_2^2(\tau_1 + \tau) - \frac{1}{12}\tau_2(\tau_2^2 + \tau\tau_2 - \tau^2)\right\}.P$$

$$N_2 - n_2 = \frac{\tau\tau_2}{6\tau_1}(\tau_1 + \tau_2).K + \frac{\tau_2}{\tau_1}\left\{\frac{1}{6}\tau\tau_2(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{12}\tau(\tau^2 + \tau\tau_2 - \tau_2^2)\right\}.P$$

$$N^0 - n^0 = \frac{\tau^0\,\tau_2^0}{6\,\tau_1}(\tau_1+\tau^0)\,.\,K + \frac{\tau^0}{\tau_1}\left\{\frac{1}{6}\tau_2^{0^2}(\tau_1+\tau^0) - \frac{1}{12}\tau_2^0(\tau_2^{0^2}+\tau^0\tau_2^0-\tau^{0^2})\right\}.P$$

$$N_2^0 - n_2^0 = \frac{\tau^0\,\tau_2^0}{6\,\tau_1}(\tau_1+\tau_2^0)\,.\,K + \frac{\tau_2^0}{\tau_1}\left\{\frac{1}{6}\tau^0\tau_2^0(\tau_1+\tau_2^0) + \frac{1}{12}(\tau^0\tau^{0^2}+\tau^0\tau_2^0-\tau_2^{0^2})\right\}.P$$

wo

$$K = \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}$$

$$P = K' = -3\left(\frac{R'}{R^4} - \frac{r'}{r^4}\right)$$

Führt man die somit gefundenen Ausdrücke in (4) ein, vernachlässigt von der dritten Potenz an die höheren Glieder von den Zwischenzeiten, die später doch wegen ihrer Kleinheit unberücksichtigt bleiben würden, und setzt dabei:

$$R_2 = R + R'\tau_1$$

so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\text{(7a)}\quad \begin{cases} \varrho\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2 + \tau_2^2\left(\frac{\lambda'''}{3!} - \frac{\lambda'^3}{3!}\right) + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau_2(\tau_1+\tau)\right\} \\ -\varrho_2\left\{\lambda' + \left(\frac{\lambda''}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau\right)(\tau_1+\tau_2) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^2+\tau_2\tau_1+\tau_1^2) - \frac{\lambda'^3}{3!}\tau^2\right\} \\ = R\left[PY\left(\frac{1}{2}\tau_2\tau_1 + \frac{1}{6}(\tau^2-\tau_2^2)\right) + \frac{1}{2}KY\tau_1\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\tau_2\tau_1 Kp\lambda' - \frac{1}{6}\tau_1(\tau_1+\tau_2)KpL'\right] + \frac{KY}{6}\tau_1(\tau_1+\tau_2)R'; \end{cases}$$

$$\text{(7b)}\quad \begin{cases} \varrho\left\{\lambda' + \frac{\lambda''}{2!}\tau_2^0 + \tau_2^{0^2}\left(\frac{\lambda'''}{3!} - \frac{\lambda'^3}{3!}\right) + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau_2^0(\tau_1+\tau^0)\right\} \\ -\varrho_2\left\{\lambda' + \left(\frac{\lambda''}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{\lambda'}{r^3}\tau^0\right)(\tau_1+\tau_2^0) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\lambda'''}{3!}(\tau_2^{0^2}+\tau_2^0\tau_1+\tau_1^2) - \frac{\lambda'^3\tau^{0^2}}{3!}\right\} \\ = R\left[PY\left(\frac{1}{2}\tau_2^0\tau_1 + \frac{1}{6}\tau^{0^2} - \tau_2^{0^2}\right) + \frac{1}{2}KY\tau_1\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\tau_2^0\tau_1 Kp\lambda' - \frac{1}{6}\tau_1(\tau_1+\tau_2^0)KpL'\right] + \frac{KY}{6}\tau_1(\tau_1+\tau_2^0)R'. \end{cases}$$

Eliminirt man nun ϱ_2, so fallen die Zwischenzeiten heraus und man hat als Endgleichung:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho \left(2\lambda''' \lambda' + 4\lambda'^4 - \dfrac{4\lambda'^2}{r^3} - 3\lambda''^2\right) \\ = R\left[-2PY\lambda' + 6pK\lambda'\left(\dfrac{1}{3}L' - \lambda'\right) + 3KY\lambda''\right] \\ -2KY\lambda' R'; \end{cases}$$

Die Frage, ob die rechte oder linke Seite der Gleichung für die Untersuchung geeigneter ist, kann jetzt dahin entschieden werden, dass die rechte Seite trotz ihres scheinbar komplicirteren Ausdruckes den Vorzug verdient, da die linke Seite eine höhere Ableitung von λ aufweist, welche die Aufstellung der Formeln, die bei der späteren Untersuchung nothwendig discutirt werden müssen, unverhältnissmässig schwieriger und unübersichtlicher gestalten würde. Andererseits ist die rechte Seite, falls man bei der ersten Näherung die Erdbahn als Kreis betrachtet und die Glieder, welche r' enthalten, beseitigt, einer wesentlichen Vereinfachung fähig, durch die die Untersuchung in einfacher und eleganter Form geführt werden kann.

Da, wie wir gezeigt haben, die Endgleichung (8) frei von allen Zwischenzeiten ist, so ist es auch vollkommen gleichgültig, wie dieselben gewählt werden. Um nun der folgenden Entwicklung, die sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass hinsichtlich der Planetenbahn die Glieder mit r' weggelassen und die Mittelradien durch das arithmetische Mittel der äusseren Radien ausgedrückt werden, die Erdbahn hingegen als Kreis betrachtet wird, eine bequemere und concinnere Form zu geben, sollen die Zwischenzeiten als gleich angenommen werden.

Es sei also:

$$\tau_2 = \Theta; \qquad \tau = 2\Theta; \quad \tau_1 = 3\Theta$$
$$\tau_2^0 = 2\Theta; \quad \tau^0 = \Theta; \quad \tau_1^0 = \tau_1 = 3\Theta$$

dann werden die Hauptformen folgende Gestalt annehmen:

$$n = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{20}{3}\frac{\Theta^2}{(r + r_2)^3}\right)$$
$$n_2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{32}{3}\frac{\Theta^2}{(r + r_2)^3}\right)$$

$$n_0 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{32}{3}\frac{\Theta^2}{(r+r_2)^3}\right)$$

$$n_2{}^0 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{20}{3}\frac{\Theta^2}{(r+r_2)^3}\right)$$

dann ergiebt sich:

$$(N-n) = (N_2{}^0 - n_2{}^0) = \frac{40}{9}\Theta^2 . K_1$$

$$(N_2 - n_2) = (N^0 - n^0) = \frac{32}{9}\Theta^2 . K_1,$$

wo $$K_1 = \left(\frac{1}{(2R)^3} - \frac{1}{(r+r_2)^3}\right) .$$

ferner wird:

$$\sin(\lambda_1 - \lambda) = \Theta\lambda' + \frac{\Theta^2}{2}\lambda'' + \frac{\Theta^3}{6}(\lambda''' - \lambda'^3)$$

$$\sin(\lambda_1 - \lambda_2) = -\left[2\Theta\lambda' + 4\Theta^2\lambda'' + \Theta^3\left(\frac{13}{3}\lambda''' - \frac{4}{3}\lambda'^3\right)\right]$$

$$\sin(\lambda_1{}^0 - \lambda) = 2\Theta\lambda' + 2\Theta^2\lambda'' + \frac{4}{3}\Theta^3(\lambda''' - \lambda'^3)$$

$$\sin(\lambda_1{}^0 - \lambda_2) = -\left[\Theta\lambda' + \frac{5}{2}\Theta^2\lambda'' + \Theta^3\left(\frac{19}{6}\lambda''' - \frac{1}{6}\lambda'^3\right)\right]$$

und hieraus:

$$n\sin(\lambda_1 - \lambda) = \frac{1}{3}\Theta(2\lambda' + \Theta\lambda'' + D\Theta^2)$$

$$n_2\sin(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{1}{3}\Theta(2\lambda' + 4\lambda''\Theta + D_2\Theta^2)$$

$$n^0\sin(\lambda_1{}^0 - \lambda) = \frac{1}{3}\Theta(2\lambda' + 2\lambda''\Theta + D^0\Theta^2)$$

$$n_2{}^0\sin(\lambda_1{}^0 - \lambda_2) = -\frac{1}{3}\Theta(2\lambda' + 5\lambda''\Theta + D_2{}^0\Theta^2),$$

wobei folgende Bezeichungen angewandt sind:

$$D = \frac{1}{3}\lambda''' - \frac{1}{3}\lambda'^3 + \frac{40}{3}\frac{\lambda'}{(r+r_2)^3}$$

$$D_2 = \frac{13}{3}\lambda''' - \frac{4}{3}\lambda'^3 + \frac{64}{3}\frac{\lambda'}{(r+r_2)^3}$$

$$D^0 = \frac{4}{3}\lambda''' - \frac{4}{3}\lambda'^3 + \frac{64}{3}\frac{\lambda'}{(r+r_2)^3}$$

$$D_2{}^0 = \frac{19}{3}\lambda''' - \frac{1}{3}\lambda'^3 + \frac{40}{3}\frac{\lambda'}{(r+r_2)^3}$$

ferner wird:

$$\sin(\lambda_1 - L) = Y + p\,\lambda'\,\Theta$$
$$\sin(\lambda_1 - L_2) = Y + p\,\lambda'\,\Theta - p\,L'\,.\,3\,\Theta$$
$$\sin(\lambda_1^0 - L) = Y + 2\,p\,\lambda'\,\Theta$$
$$\sin(\lambda_1^0 - L_2) = Y + p\,\lambda'\,2\,\Theta - p\,L'\,3\,\Theta.$$

Führt man diese Ausdrücke in Gleichung (4) ein, so bekommt man:

$$(2\,\lambda' + \Theta\,\lambda'' + D\,\Theta^2)\,\varrho - (2\,\lambda' + 4\,\Theta\lambda'' + D_2\,\Theta^2)\,\varrho_2 = 8\,R\,K_1\,\Theta\,(3\,Y + 3\,p\,\lambda'\,\Theta - 4\,p\,L'\,\Theta)$$
$$(2\,\lambda' + 2\,\lambda''\,\Theta + D^0\,\Theta^2)\,\varrho - (2\,\lambda' + 5\,\lambda''\,\Theta + D_2^0\,\Theta^2)\varrho_2 = 8\,R\,K_1\,\Theta\,(3\,Y + 6\,p\,\lambda'\,\Theta - 4\,p\,L'\,\Theta).$$

Eliminirt man nun ϱ_2 und führt die angegebenen Substitutionen aus, so bekommt man:

$$(9) \qquad \varrho\left(2\,\lambda'\,\lambda''' + 4\,\lambda'^4 - 3\,\lambda''^2 - \frac{32\,\lambda'^2}{(r+r_2)^3}\right) = 8\,.\,R\,.\,K_1\,[3\,Y\,\lambda'' + 2\,p\,\lambda'\,L' - 6\,p\,\lambda'^2].$$

Die Untersuchung dieser Gleichung ist bequemer als die der Gleichung (5), wenn in dieselbe die (in 6a und 6b) angeführten Ausdrücke für die n, welche sich auf endliche Zwischenzeiten beziehen, eingesetzt werden. Zeigt sich nun, dass die Bestimmung von ϱ aus (9) verhältnissmässig unsicher wird, so wird dasselbe auch bei endlichen Zwischenzeiten der Fall sein, wenn das arithmetische Mittel aus denselben zusammenfällt mit der Zeit, auf welche sich (9) bezieht.

II.

Beachtet man, dass $Y = \sin(\lambda - L)$ und $\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = p = \cos(\lambda - L)$ ist, so kann man die rechte Seite auch in folgender Form schreiben:

(10) $8RK_1[3\lambda''\sin(\lambda - L) - 6\lambda'^2\cos(\lambda - L) + 2\lambda' L'\cos(\lambda - L)]$.

Die folgende Untersuchung geht nun dahin: Kann dieser Ausdruck $= 0$ werden, bez. unter welchen Bedingungen geschieht dies?

Nimmt man die Opposition als Ausgangspunkt der Zählung, so wird es erlaubt sein, die Untersuchung nur bis zu dem Punkte auszudehnen, wo $\lambda - L = -180^0$ ist. Dieser Punkt liegt unzweifelhaft schon jenseits der Grenze, bis zu der Planeten im Allgemeinen beobachtet werden können.

Bevor wir nun in die Untersuchung des Ausdrucks (10) eingehen, wird es nothwendig sein, den Verlauf von λ, λ', λ'' von $\lambda - L = 0^0$ bis $\lambda - L = -180^0$ näher zu untersuchen. Zu diesem Zwecke soll im Folgenden der Ausdruck für jede dieser Grössen abgeleitet werden.

Es ist:

(a)
$$x = X + \varrho\cos\lambda$$
$$y = Y + \varrho\sin\lambda.$$

Durch Differentiation bekommt man:

(b)
$$x' = X' + \cos\lambda\,\varrho' - \varrho\sin\lambda\,\lambda'$$
$$y' = Y' + \sin\lambda\,\varrho' + \varrho\cos\lambda\,\lambda'$$

und hieraus:

(c)
$$x'' = X'' + \cos\lambda\,\varrho'' - 2\sin\lambda\,\varrho'\lambda' - \varrho\cos\lambda\,\lambda'^2 - \varrho\sin\lambda\,\lambda''$$
$$y'' = Y'' + \sin\lambda\,\varrho'' + 2\cos\lambda\,\varrho'\lambda' - \varrho\sin\lambda\,\lambda'^2 + \varrho\cos\lambda\,\lambda''.$$

Da nun

$$x'' = -\frac{x}{r^3}; \quad X'' = -\frac{X}{r^3}$$
$$y'' = -\frac{y}{r^3}; \quad Y'' = -\frac{Y}{r^3}$$

ist, so kann man auch die Gleichungen (c), indem man die erste mit $\sin\lambda$, die zweite mit $\cos\lambda$ multiplicirt und dann subtrahirt, in folgende Gleichung zusammenziehen:

$$\text{(d)} \qquad \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \sin (L - \lambda) = 2\,\varrho'\,\lambda' + \varrho\,\lambda''.$$

Führt man in Gleichung (a) statt der rechtwinkligen Coordinaten die polaren ein und bezeichnet man mit

l die heliocentrische Länge des Planeten
b die heliocentrische Breite des Planeten
v die wahre Anomalie
π die Perihellänge
p den Parameter
L die heliocentrische Länge der Erde,

so bekommt man:

$$\varrho \cos \lambda = r_1 \cos l - R \cos L$$
$$\varrho \sin \lambda = r_1 \sin l - R \sin L,$$

wo die Sonnenbreiten $= 0$ und $r_1 = r \cos b$ gesetzt ist. Hieraus findet man:

$$\varrho' \cos \lambda - \varrho \sin \lambda \lambda' = r_1' \cos l - r_1 \sin l l' + R \sin L L'$$
$$\varrho' \sin \lambda + \varrho \cos \lambda \lambda' = r_1' \sin l + r_1 \cos l l' - R \cos L L'.$$

Durch ähnliche Operationen wie bei (c) findet man aus diesen Gleichungen:

$$\text{(f)} \quad \begin{aligned} \varrho \lambda' &= r_1 \cos (l - \lambda)\, l' + r_1' \sin (l - \lambda) - R \cos (L - \lambda)\, L' \\ \varrho' &= - r_1 \sin (l - \lambda)\, l' + r_1' \cos (l - \lambda) + R \sin (L - \lambda)\, L'. \end{aligned}$$

Durch (d) und (f) sind die gesuchten Ausdrücke gegeben.

λ ist in der Opposition $= L$, wird mit wachsender Zeit kleiner, bis es ein Minimum erreicht und nimmt dann zu. Um eine ungefähre Uebersicht zu haben, wann das Minimum eintritt, wird es vollständig genügen, Erd- und Planetenbahn als Kreise anzusehen, die in derselben Ebene liegen. Wir finden unter dieser Voraussetzung aus (f) unmittelbar:

$$r \cos (l - \lambda)\, l' = R \cos (L - \lambda)\, L'$$

oder nach einiger Umformung:

$$\cos (L - l) = \frac{a^2 n + m}{a (n + m)} \text{ und } \operatorname{tg} (L - \lambda) = \frac{a \sin (L - l)}{a \cos (L - l) - 1}$$

wo m die mittlere tägliche Bewegung der Erde, n die des Planeten bedeutet.

Für $\lg a = 0{,}3000$ und $\lg a = 0{,}5600$ finden wir mithin:

$$L - \lambda = 49^0{,}1$$
$$L - \lambda = 59^0{,}3.$$

λ' hat für die Opposition folgenden Ausdruck (da $(L - \lambda) = 0$ ist):

$$r_1 l' - RL' = \varrho \lambda',$$

da nun $l = \pi + v$ ist und $l' = v'$

ausserdem nach dem Flächensatz:

$$r^2 v' = \varkappa \sqrt{p},$$

so wird $$r_1 l' = \frac{\varkappa \sqrt{p}}{r} \cos b;$$

da ferner $RL' = \varkappa$ ist, so wird

$$\varrho \lambda' = \varkappa \left(\frac{\sqrt{p}}{r} \cos b - 1 \right).$$

ϱ und $\varkappa$ sind ihrer Natur nach positive Grössen. $\frac{\sqrt{p}}{r} = \frac{\cos \varphi \sqrt{a}}{r}$ ist kleiner als 1. Mithin ist der Klammerausdruck und zugleich λ' in der Opposition negativ.

Mit wachsender Zeit wird λ' negativ kleiner, bis es $= 0$ wird in dem Augenblick, wo λ ein Minimum erreicht, von dort an nimmt es positiv zu und gelangt bei $L - \lambda = 180^0$ zu einem Maximum.

ϱ' ist in der Opposition $= 0$, da ϱ sein Minimum hat, wächst dann mit der Zeit im positiven Sinne, erreicht ein Maximum und nimmt dann ab bis $L - \lambda = 180^0$, wo es $= 0$ wird, da ϱ in diesem Punkte sein Maximum besitzt.

λ'' ist in der Opposition $= 0$, da sowohl $L - \lambda$ als auch $\varrho' = 0$ ist; ebenso bei $L - \lambda = 180^0$. Zwischen diesen beiden Punkten nimmt λ'' nur positive Werthe an, da λ' erst bei $L - \lambda = 180^0$ sein positives Maximum erreicht.

Nach diesen Betrachtungen gehen wir zur Untersuchung des Ausdrucks (10) selbst über.

Bei $$L - \lambda = 0$$

wird der Ausdruck $= 2 \lambda' L' - 6 \lambda'^2$, und da λ' negativ ist, so wird er auch negativ.

Wächst $L - \lambda$, so wird in dem Intervall bis $\lambda' = 0$

$$2 \lambda' L' \cos (\lambda - L) \text{ negativ}$$
$$- 6 \lambda'^2 \cos (\lambda - L) \text{ negativ}$$
$$3 \lambda'' \sin (\lambda - L) \text{ negativ},$$

der Ausdruck bleibt mithin negativ.

Bei $\lambda' = 0$ geht der Ausdruck über in $3\,\lambda''\sin(\lambda - L)$, bleibt also negativ.

Wächst $L - \lambda$ weiter, so wird

$$\begin{aligned} &2\,\lambda'\,L'\cos(\lambda - L) \text{ positiv} \\ -\ &6\,\lambda'^2\cos(\lambda - L) \text{ negativ} \\ +\ &3\,\lambda''\sin(\lambda - L) \text{ negativ.} \end{aligned}$$

Der Ausdruck bleibt mithin so lange negativ, als

$$3\,\lambda''\sin(L - \lambda) + 6\,\lambda'^2\cos(L - \lambda) > 2\,\lambda'\,L'\cos(L - \lambda)$$

d. h.

$$3\,\lambda''\operatorname{tg}(L - \lambda) > 2\,\lambda'(L' - 3\,\lambda').$$

Da diese Ungleichung unter allen Umständen stattfinden muss, so werden wir uns darauf beschränken können, nachzuweisen, dass die linke Seite grösser ist als das Maximum der rechten Seite.

Wir differenziiren daher die rechte Seite und erhalten:

$$2\,\lambda''(L' - 3\,\lambda') - 2\,\lambda' \,.\, 3\,\lambda'' = 0$$

$$\lambda' = \frac{L'}{6}.$$

Der Maximalwerth der rechten Seite wird mithin: $\frac{1}{6}\,L'^2$, ein Werth, den $\operatorname{tg}(L - \lambda)$ unmittelbar hinter der Opposition hat. Jedenfalls ist $\operatorname{tg}(L - \lambda) \,.\, 3\,\lambda''$ immer grösser als $2\,\lambda'(L' - 3\,\lambda')$ im Intervall von $\lambda' = 0$ bis $\lambda' = \frac{1}{3}\,L'$, wo die rechte Seite der Ungleichung auch $= 0$ wird.

Wächst $L - \lambda$ bis 90^0, so wird $\operatorname{tg}(L - \lambda)$ immer grösser und zwar positiv, während $2\,\lambda'(L' - 3\,\lambda')$ negativ wächst. Mithin giebt es von $L - \lambda = 0$ bis $L - \lambda = 90^0$ keinen Zeitpunkt, wo der Ausdruck (10) $= 0$ wird.

Wächst $L - \lambda$ über 90^0 hinaus, so springt die Tangente von $+\infty$ nach $-\infty$ um, und wir müssen mithin, damit die Ungleichung ihre Richtigkeit behält, den Ausdruck folgendermaassen aufstellen:

$$3\,\lambda''\operatorname{tg}(L - \lambda) < 2\,\lambda'(L' - 3\,\lambda').$$

Wächst nun $L - \lambda$ von 90^0 bis 180^0, so nimmt $3\,\lambda''\operatorname{tg}(L - \lambda)$ alle Werthe an, die zwischen $-\infty$ und 0 liegen, während $2\,\lambda'(L' - 3\,\lambda')$ von einem bestimmten negativen Werthe,

den es bei $L - \lambda = 90^0$ hatte, zu einem grösseren negativen Werth wächst. Mithin muss in diesem Intervall ein Zeitpunkt (ein kritischer Tag) existiren, an dem $\operatorname{tg}(L - \lambda)\, 3\,\lambda''$ in Bezug auf Grösse und Vorzeichen mit $2\,\lambda'\,(L' - 3\,\lambda')$ identisch ist.

Dieser Zeitpunkt ist natürlich für die verschiedenen Planeten ein verschiedener, da er eine Funktion der Elemente ist.

Ferner ist unmittelbar klar aus unseren Betrachtungen, dass nicht für alle Planeten ein solcher Zeitpunkt existirt, sondern nur für solche, bei denen zu irgend einer Zeit, die zwischen $L - \lambda = 90^0$ und $L - \lambda = 180^0$ liegt,

$$2\,\lambda'\,L' - 6\,\lambda'^2 = 0 \text{ oder negativ wird.}$$

Wir brauchen mithin nur, um die Grenzfälle für die verschiedenen Planeten zu bekommen, die Gleichung resp. Ungleichung

$$L' \leqq 3\,\lambda' \text{ aufzulösen und zwar für}$$

die Grenze $L - \lambda = 180^0$.

Für diesen Zeitpunkt finden wir:

aus (f) $$\varrho\,\lambda' = r_1\,l' + RL'$$

und da ϱ (nach (e)) $= r_1 \cos(l - \lambda) - R\cos(L - \lambda)$
so wird

$$\lambda' = \frac{r_1\,l' + RL'}{r_1 + R}$$

und wir haben als Grenzfall aufzulösen:

$$\frac{3\,(r_1\,l' + RL')}{r_1 + R} \geqq L';$$

da aber, wie schon oben gezeigt, $r_1\,l' = \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r}\cos b$, so bekommt man

$$3\,\varkappa\sqrt{p}\cos b + 2\,RL'\,r - r^2\cos b\,L' \geqq 0$$

$$r^2 - \frac{2\,Rr}{\cos b} - 3\cos\varphi\sqrt{a} \leqq 0$$

$$r^2 - \frac{2\,Rr}{\cos b} < 3\cos\varphi\sqrt{a}.$$

Für $b = 0$ wird $+\frac{2\,Rr}{\cos b}$ ein Minimum, die linke Seite mithin ein Maximum; wir brauchen mithin nur

(10a) $$r - 2R \leqq 3 \cos \varphi \frac{\sqrt{a}}{r}$$ aufzulösen.

Da r nun $= a\,(1 - e \cos E)$ ist, so wird r ein Maximum, wenn sich der Planet im Aphel befindet, und zwar $= a\,(1 + e)$. In diesem Falle zeigt die linke Seite ein Maximum, die rechte dagegen ein Minimum. Da aber trotzdem die Gleichung ihre Gültigkeit bewahren muss, so wird es vollständig genügen, dieselbe für das Aphel, wo eben diese Bedingung erfüllt ist, aufzulösen; wir haben mithin

$$a(1 + e) - 2 \leqq \frac{3 \cos \varphi \sqrt{a}}{a(1 + e)}$$

$$a^2(1 + e)^2 - 2a(1 + e) \leqq 3 \cos \varphi \sqrt{a}.$$

Setzt man nun $\sqrt{a} = z$. und dividirt durch z, so hat man schliesslich als Endgleichung:

$$z^3(1 + e)^2 - 2z(1 + e) = 3 \cos \varphi.$$

woraus man für verschiedene Werthe von φ die zugehörigen Werthe von a bekommt.

Im Folgenden ist eine kleine Tafel berechnet für φ von 0^0 bis 30^0.

φ	lg a
0^0	0,5544
5^0	0,5110
10^0	0,4702
15^0	0,4316
20^0	0,3951
25^0	0,3604
30^0	0,3318

Nachdem wir somit eine Relation zwischen a und φ gefunden haben, die approximativ einen Ueberblick gewährt, wird es von Interesse sein, die Grenzen festzustellen, innerhalb derer die kritische Zeit (von der Opposition aus gerechnet) liegt.

Zunächst finden wir aus der Gleichung:

(10b) $$\operatorname{tg}(L - \lambda) = \frac{2\lambda'(L' - 3\lambda')}{3\lambda''}$$

einen Mittelwerth für die Zeit, indem wir Erd- und Planetenbahn als Kreise annehmen. Da unter dieser Annahme

$$L = mt + v$$
$$l = nt + v$$

ist, wo v = dem Winkel zwischen Widderpunkt und Opposition ist, so wird

$$\lambda' = \frac{h - a\vartheta \cos pt}{a^2 + 1 - 2a \cos pt} \cdot \sin 1''.$$

$$\lambda'' = \frac{p \sin pt\,(a^3\vartheta + a\vartheta - 2ah)\,(\sin 1'')^2}{(a^2 + 1 - 2a \cos pt)^2}$$

$$\operatorname{tg}(L - \lambda) = \frac{a \sin pt}{a \cos pt - 1},$$

wobei $h = a^2 n + m$

$\vartheta = m + n$

$p = m - n.$

Setzt man diese Substitutionen in Gleichung (10b) ein, so bekommt man eine Gleichung dritten Grades von der Form

$$\alpha \cos^3 pt + \beta \cos^2 pt + \gamma \cos pt + \delta = 0$$

wo:

$\alpha = 4a^3 m\vartheta - 6a^3\vartheta^2$

$\beta = 12a^2 h\vartheta - 4a^2 mh - 2a^4 m\vartheta - 6a^2 m\vartheta + 6a^2\vartheta^2$
$+ 3a^4 p\vartheta + 3a^2 p\vartheta - 6a^2 ph$

$\gamma = 2a^3 mh + 6a\,mh + 2a^3 m\vartheta + 2a\,m\vartheta - 6a h^2 - 12a h\vartheta$

$\delta = -2a^2 mh - 2a\,mh + 6h^2 - 3a^4 p\vartheta - 3a^2 p\vartheta + 6a^2 ph.$

Mittelst dieser Formeln sind für verschiedene halbe grosse Axen die zugehörigen t berechnet worden:

lg a	t (in Tagen)
0,3000	± 147
0,4000	± 160
0,5000	± 202
0,5544	± 214

wobei das + Zeichen die Zeit nach, das — Zeichen die Zeit vor der Opposition ergiebt.

Haben wir somit eine bestimmte Zeit für den Kreis er-

halten, so werden wir uns unter der Annahme, dass die Planetenbahn eine Ellipse ist, damit begnügen müssen, die Bestimmung zu haben, dass die kritische Zeit zwischen $L - \lambda = 90^0$ und $L - \lambda = 180^0$ liegt. So weiten Spielraum diese Grenzen auch zulassen und so unbestimmt eine Zeitangabe infolgedessen ist, so wird sie für die Praxis doch insofern vollständig ausreichen, als die Untersuchung die Gewissheit giebt, dass innerhalb von $L - \lambda = 0^0$ bis $L - \lambda = 90^0$ keine solche kritische Zeit existirt, die eine Bahnbestimmung unsicher resp. unmöglich macht. Grade aber bei ersten Bahnbestimmungen werden die Planeten in der Opposition resp. kurz vorher oder nachher beobachtet worden sein.

Will man aber die Zeit für einen Planeten genauer haben, so müsste man, wie leicht ersichtlich, die Kenntnis von den Elementen schon haben, da die Zeit lediglich eine Funktion der Elemente ist; und wir können dann unter dieser Voraussetzung, indem wir jetzt die strengere Gleichung (8) untersuchen, uns folgender Entwicklungsformeln bedienen.

Es ist:

$$\mathfrak{T} = \mathrm{F}\,(\omega,\ e,\ i,\ \Omega,\ a,\ Ep).$$

Diese Funktion kann man nun nach dem Taylor'schen Satz in folgende Reihe entwickeln

$$F(\omega, e, i, \Omega, a, Ep) = F(\omega, e, i, a, \Omega, Ep)_{\substack{e=0\\ i=0}}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial e}\cdot e + \frac{\partial F}{\partial i}\, i + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial e^2}\, e^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\, i^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial e\,\partial i}\, e\, i$$

u. s. w.

Nehmen wir nun vorläufig nur die ersten Potenzen von e und i mit in Rechnung und setzen

$$F\,(\omega, e, i, \Omega, a, Ep)_{\substack{e=0\\ i=0}} = f\,(a, Ep)$$

$$F\,(\omega, e, i, \Omega, a, Ep)_{\substack{e=0\\ i=0}} + \frac{\partial F}{\partial e}\cdot e = g\,(\omega, e, a, Ep)$$

$$F\,(\omega, e, i, \Omega, a, Ep)_{\substack{e=0\\ i=0}} + \frac{\partial F}{\partial i}\cdot i = h\,(\Omega, i, a, Ep)$$

so wird

$$\mathfrak{T} = F\,(\omega, e, i, \Omega, a, Ep) = f + (g - f) + (h - f).$$

Da nun f die Kreiswerthe bestimmt, die aus einer früheren Tabelle schon bekannt sind, so wird sich die folgende Untersuchung darauf erstrecken, die Correktionen, die durch die ersten Differentialquotienten nach e und i bedingt sind, analytisch aufzustellen und zu berechnen.

Streng genommen, sind sowohl Erd- als auch Planetenbahn Ellipsen; indes soll auch für die fernere Untersuchung die Erdbahn, wie bisher, als Kreis angenommen werden, eine Annahme, welche die Entwicklung der folgenden Formeln in hohem Grade erleichtert und die spätere Rechnung wesentlich vereinfachen wird. Aus diesem Grunde ist bei dem Beispiel, das am Schluss der Arbeit angefügt ist, die Excentricität der Erdbahn vernachlässigt. Dieselbe würde erst bei der zweiten Potenz der Excentricität der Planetenbahn mit in Rechnung gezogen werden müssen, und dürfte infolgedessen bei der ersten Annäherung vernachlässigt werden.

Gehen wir nun zu den Entwicklungen der Formeln über, so ist unmittelbar klar, dass die Neigung, da nur der Cosinus derselben auftritt, für die erste Näherung ganz ohne Belang ist.

Anders verhält es sich jedoch mit der Näherung bezüglich der Excentricität.

Hier gehen wir von der Annahme aus, dass die Planetenbahn zwar eine Ellipse, jedoch mit der Kreisbahn der Erde in einer Ebene liegt.

Entwicklung der Formeln.

Es sei $\mathfrak{T}$ = der Zeit zwischen Opposition und dem kritischen Tage.

t_1 = der Zeit zwischen Periheldurchgang und Oppositionszeit.

π = der Perihellänge.

b = der Länge zwischen Perihel und Opposition.

Dann ist

$$l = \pi + n(\mathfrak{T} + t_1) + 2e \sin n(\mathfrak{T} + t_1) + \ldots .$$

$$L = \pi + b + m\mathfrak{T}$$

$$= \pi + mt + nt_1 + 2e \sin nt_1 + \ldots .$$

$$(L - l) = (m - n)\mathfrak{T} + 2e \sin nt_1 - 2e \sin n(\mathfrak{T} + t_1)$$

$$r = a - ae \cos n(\mathfrak{T} + t_1)$$

$$r^2 = a^2 - 2a^2 e \cos n(\mathfrak{T} + t_1).$$

Setzt man nun $\mathfrak{T} = t + \delta t$

und $t + t_1 = T^0$, wo $t =$ der Zeit ist, die man durch Kreisberechnung gefunden hat.

Ueber die Grösse von δt ist zu bemerken, dass, da es nur von der Excentricität abhängt, von derselben Ordnung ist, wie e.

Diese Substitutionen eingeführt und nach dem Taylor'schen Satz entwickelt, erhält man:

$$L - l = q = (m - n)\, t + 2\, e\, (\sin n t_1 - \sin n T^0) + (m - n)\, \delta t$$
$$= p t + 2\, e\, P + p\, \delta t,$$

wo die Bedeutungen von p und P unmittelbar klar sind.

$$(L - l)' = q' = (p - 2\, e\, n \cos n T^0) \,.\, \sin 1''$$
$$l' = (n + 2\, e n \cos n T^0) \sin 1''$$
$$L' = m \sin 1''$$
$$r = a - a e \cos n T^0; \qquad r' = (a e n \sin n T^0) \sin 1''$$
$$r'' = (a e n^2 \cos n T^0)\, (\sin 1'')^2$$
$$r^2 = a^2 - 2\, a^2\, e \cos n T^0; \quad r^{2'} = (2\, a^2\, e n \sin n T^0) \,.\, \sin 1''.$$

Diese Entwicklungen vorausgeschickt, wollen wir die rechte Seite der Gleichung (8) näher untersuchen. Diese rechte Seite gestaltet sich unter den festgesetzten Annahmen folgendermaassen:

$$(11) \quad -2\, P\, Y \lambda' + 6\, p K \lambda' \left(\frac{1}{3} L' - \lambda' \right) + 3\, K\, Y \lambda'' = 0.$$

Diese Gleichung geht nach Einsetzung der Substitutionen über in:

$$(12) \quad 2\, \lambda'\, L' - 6\, \lambda'^2 + \operatorname{tg} (\lambda - L) \left[3\, \lambda'' - \frac{6\, r'\, \lambda'}{r\, (r^3 - 1)} \right] = 0.$$

Es war nun:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{r \sin l - \sin L}{r \cos l - \cos L}; \quad \text{daraus folgt:}$$

$$\lambda' = \frac{\eta - G \cos q + r' \sin q}{r^2 + 1 - 2\, r \cos q} \,.\, \sin 1''$$

$$\lambda'' = \frac{A + B \cos q + C \sin q + D \cos^2 q + E \sin q \cos q + F \sin^2 q \,.\, (\sin 1'')^2}{(r^2 + 1 - 2\, r \cos q)^2}$$

wo

$$\eta = r^2\, l' + m$$
$$G = r\, (m + n + 2\, e n \cos n T^0)$$
$$A = r^4\, l'' - r^{2'}\, L' + r^{2'}\, l' + r^2\, l''$$

$$
\begin{aligned}
B &= -r'q' + l'(r^2 r' - r r^{2'}) - L'(r^2 r' - r r^{2'}) \\
&\quad - r^3 l'' - r l'' + r' q'(r^2 + 1) - 2 r^2 l'' \\
C &= -2 r q'(r^2 l' + L') + r^3 q'(l' + L') + r q'(l' + L') \\
&\quad + r^2 r'' + r'' - r^{2'} r' \\
D &= 2 r^2 l' - 2 r r' q' \\
E &= -2 r r'' + 2 (r')^2 \\
F &= -2 r r' q'.
\end{aligned}
$$

Ferner ist:

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = \frac{-r \sin q}{r \cos q - 1}$$

Führt man nun λ', λ'', $\operatorname{tg}(\lambda - L)$ in Gleichung (12) ein, so bekommt man:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\cos q\,(r^4 - r)\,[2\eta L' r^3 + 2\eta L' r + 2 G L' r^3 + 2 G L' \\
\qquad + 4\eta L' r - 6\eta^2 r - 12 G \eta] \\
+ \cos^2 q\,(r^4 - r)\,[-2 G L' r^3 - 2 G L' r - 4\eta L' r^2 \\
\qquad - 4\eta L' r + 12 G \eta r + 6 G^2] \\
+ \sin q \cos q \,\{(r^4 - r).[2 L' r^3 r' + 2 L' r r' + 4 L' r r' \\
\qquad - 12\eta r r' - 3 B r - 12 G r'] \\
\qquad - 12 r^2 r' - 6 G r^3 r' - G r r'\} \\
+ \cos^3 q\,(r^4 - r)\,[4 L' G r^2 - 6 G^2 r] \\
+ \sin q \cos^2 q\,\{(r^4 - r)\,[-4 L' r^2 r' - 3 D r + 12 G r r'] \\
\qquad + 12 G r^2 r'\} \\
+ \sin q\,\{(r^4 - r)\,[-2 L' r^2 r' - 2 L' r' + 6\eta r' - 3 A r + 6\eta r'] \\
\qquad + 6 r^3 r' + 6\eta r r'\} \\
+ \sin^2 q\,\{(r^4 - r)\,[-3 C r - 6 r r'^2 + 6 r'^2] + 6 r^3 r'^2 + 6 r r'^2\} \\
+ \sin^2 q \cos q\,\{(r^4 - r)\,[-3 E r] + 12 r^2 r'^2\} \\
+ \sin^3 q\,(r^4 - r)\,[-3 F r] \\
+ (r^4 - r)\,[-2 L' \eta r^2 - 2 L' \eta + 6\eta^2] = 0.
\end{cases}
$$

Setzt man in dieser Gleichung $e = 0$, wodurch $r = a$ und $r' = 0$ wird, so kann man sich leicht überzeugen, dass genau dieselbe Gleichung entsteht, wie beim Kreise, nämlich:

$$\alpha \cos^3 pt + \beta \cos^2 pt + \gamma \cos pt + \delta = 0.$$

Entwickelt man nun $q = pt + 2 e P + p\delta t$ nach Sinus und Cosinus, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\cos q &= \cos pt - \sin pt\,(p\delta t + 2 e P) \\
\sin q &= \sin pt + \cos pt\,(p\delta t + 2 e P)
\end{aligned}
$$

$$\cos^2 q = \cos^2 pt - 2 \sin pt \cos pt\,(p\,\delta t + 2\,e\,P)$$
$$\sin q \cos q = \sin pt \cos pt + \cos 2\,pt\,(p\,\delta t + 2\,e\,P)$$
$$\sin q \cos^2 q = \sin pt \cos^2 pt + (\cos^3 pt - 2 \sin^2 pt \cos pt)\,.\,(p\,\delta t + 2\,e\,P)$$
$$\sin^2 q \cos q = \sin^2 pt \cos pt + (2 \sin pt \cos^2 pt - \sin^3 pt)\,.\,(p\,\delta t + 2\,e\,P)$$
$$\sin^3 q = \sin^3 pt + 3 \sin^2 pt \cos pt\,(p\,\delta t + 2\,e\,P)$$
$$\cos^3 q = \cos^3 pt - 3 \sin pt \cos^2 pt\,(p\,\delta t + 2\,e\,P).$$

Ferner werden, wenn man die alten Substitutionen:

$$\vartheta = m + n$$
$$h = a^2 n + m$$

beibehält, die Glieder der Gleichung (13) folgende:

$$2\,\eta\,L'\,r^3 = 2\,a^3\,m\,h - 6\,a^3\,m\,h\,e \cos n\,T^0$$
$$2\,\eta\,L'\,r = 2\,a\,m\,h - 2\,a\,m\,h\,e \cos n\,T^0$$
$$2\,G\,L'\,r^2 = 2\,a^3\,m\,\vartheta - \left(\frac{6\,a^3\,m\,\vartheta}{n} - 4\,a^3 m\right) e n \cos n\,T^0$$
$$2\,G\,L' = 2\,a\,m\,\vartheta - \left(\frac{2\,a\,m\,\vartheta}{n} - 4\,a\,m\right) e n \cos n\,T^0$$
$$4\,\eta\,L'\,r = 4\,a\,m\,h - 4\,a\,m\,h\,e \cos n\,T^0$$
$$-6\,\eta^2\,r = -6\,a\,h^2 + 6\,a\,h^2\,e \cos n\,T^0$$
$$-12\,G\eta = -12\,a\,h\,\vartheta + \left(\frac{12\,a\,h\,\vartheta}{n} - 24\,a\,h\right) e n \cos n\,T^0$$
$$-2\,G\,L'\,r^3 = -2\,a^4\,m\,\vartheta + \left(\frac{8\,a^4\,m\,\vartheta}{n} - 4\,a^4 m\right) e n \cos n\,T^0$$
$$-2\,G\,L'\,r = -2\,a^2\,m\,\vartheta + \left(\frac{4\,a^2\,m\,\vartheta}{n} - 4\,a^2 m\right) e n \cos n\,T^0$$
$$-4\,\eta\,L'\,r^2 = -4\,a^2\,m\,h + \frac{8\,a^2\,m\,h}{n}\,e n \cos n\,T^0$$
$$-4\,L'\,G\,r = -4\,a^2\,m\,\vartheta + \left(\frac{8\,a^2\,m\,\vartheta}{n} - 8\,a^2 m\right) e n \cos n\,T^0$$
$$+12\,G\eta\,r = -12\,a^2\,\vartheta\,h - \left(\frac{24\,a^2\,\vartheta\,h}{n} - 24\,a^2\,h\right) e n \cos n\,T^0$$
$$+6\,G^2 \quad = 6\,a^2\,\vartheta^2 - \left(\frac{12\,a^2\,\vartheta^2}{n} - 24\,a^2\,\vartheta\right) e n \cos n\,T^0$$
$$2\,L'\,r^3\,r' \quad = 2\,a^4\,m\,n\,e \sin n\,T^0$$
$$2\,L'\,r\,r' \quad = 2\,a^2\,m\,n\,e \sin n\,T^0$$
$$4\,L'\,r\,r' \quad = 4\,a^2\,m\,n\,e \sin n\,T^0$$

$$
\begin{aligned}
-6\,\eta rr' &= -6\,a^2\,hne\sin nT^0\\
-3\,Br &= (-3\,a^4n^2 - 3\,a^4mn - 6\,a^2n^2 + a^4pn\\
&\qquad - 12\,a^3n^2)\,.\,e\sin nT^0\\
-12\,Gr' &= -12\,a^2n\vartheta e\sin nT^0\\
-6\,Grr' &= -6\,a^3n\vartheta e\sin nT^0\\
-12\,\eta r^2r &= -12\,a^3nhe\sin nT^0\\
-6\,Gr^3r' &= -6\,a^5n\vartheta e\sin nT^0\\
-6\,Grr' &= -6\,a^3\vartheta ne\sin nT^0\\
-4\,L'Gr^2 &= 4\,a^3m\vartheta + \left(8\,a^3m - \frac{12\,a^3m\vartheta}{n}\right)en\cos nT^0\\
+6\,G^2r &= -6\,a^3\vartheta^2 - \left(24\,a^3\vartheta - \frac{18\,a^3\vartheta^2}{n}\right)en\cos nT^0\\
-4\,L'r^2r' &= -4\,a^3mne\sin nT^0\\
-3\,Dr &= (12\,a^3n^2 + 6\,a^3pn)\,e\sin nT^0\\
+6\,Grr' &= 6\,a^3n\vartheta e\sin nT^0\\
+12\,Gr^2r' &= +12\,a^4n\vartheta e\sin nT^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2\,L'r^2r' &= -2\,a^3mne\sin nT^0\\
-2\,L'r' &= -2\,amne\sin nT^0\\
+6\,\eta r' &= 6\,anhe\sin nT^0\\
-3\,Ar &= (6\,a^3n^2 + 6\,a^3mn)\,e\sin nT^0\\
-6\,\eta rr' &= -6\,a^2nhe\sin nT^0\\
+6\,\eta r' &= +6\,anhe\sin nT^0\\
+6\,\eta r^3r' &= +6\,a^4nhe\sin nT^0\\
+6\,\eta rr' &= +6\,a^2nhe\sin nT^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-3\,Cr &= +6\,a^2ph - 12\,a^2phe\cos nT^0\\
&\quad -3\,a^4p\vartheta + \left(\frac{12\,a^4p\vartheta}{n} - 6\,a^4p\right)en\cos nT^0\\
&\quad -3\,a^2p\vartheta + \left(\frac{6\,a^2p\vartheta}{n} - 6\,a^2p\right)en\cos nT^0\\
&\quad -3\,a^4n^2e\cos nT^0\\
&\quad -3\,a^2n^2e\cos nT^0
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-6\,rr'^2\\
&+6\,r'^2\\
&+6\,r^3r'^2\\
&+6\,rr'^2
\end{aligned}
\right\} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
-3\,Er &= 6\,a^3n^2e\cos nT^0\\
+12\,r^2r'^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-3\,Fr &= 6\,a^3\,pne\sin nT^0\\
-2\,L'\,\eta\,r^2 &= -2\,a^2\,mh + 4\,a^2\,mhe\cos nT^0\\
-2\,L'\,\eta &= -2\,mh\\
+6\,\eta^2 &= 6\,h^2
\end{aligned}
$$

Setzt man nun noch $r^4 - r = x - x_0$

wo

$$
\begin{aligned}
x &= a^4 - a\\
x_0 &= (4\,a^4 - a)\,e\cos nT^0
\end{aligned}
$$

und führt alle diese Substitutionen in Gleichung (13) ein, so erhält man folgenden Ausdruck:

(14)
$$
\left\{\begin{array}{llll}
\text{I.} & & \text{II.} & \\
x\,.\,\mathfrak{K}\cos^3 pt & -x\,.\,\mathfrak{K}\,3\sin pt\cos^2 pt\,(p\delta t + 2\,eP) & & \\
x\,.\,\mathfrak{L}\cos^2 pt & -x\,.\,\mathfrak{L}\,2\sin pt\cos pt\,(p\delta t + 2\,eP) & & \\
x\,.\,\mathfrak{M}\cos pt & -x\,.\,\mathfrak{M}\sin pt & (p\delta t + 2\,eP) & \\
x\,.\,\mathfrak{N} & & & \\
 & \text{III.} & & \\
 & +\cos^3 pt\,(x\,\mathfrak{K}_1 - x_0\,\mathfrak{K}) & & \\
 & +\cos^2 pt\,(x\,\mathfrak{L}_1 - x_0\,\mathfrak{L}) & & \\
 & +\cos pt\,(x\,\mathfrak{M}_1 - x_0\,\mathfrak{M}) & & \\
 & +\quad (x\,\mathfrak{N}_1 - x_0\,\mathfrak{N}) & \text{IV.} & \\
 & +\sin pt\,x\,\mathfrak{P}_1 & +\mathfrak{P}_1{}^0\sin pt & \\
 & +\sin pt\cos^2 pt\,x\,\mathfrak{Q}_1 & +\mathfrak{Q}_1{}^0\sin pt\cos^2 pt & \\
 & +\sin pt\cos pt\,x\,\mathfrak{R}_1 & +\mathfrak{R}_1{}^0\sin pt\cos pt & \\
 & +\sin^3 pt\quad x\,\mathfrak{F}_1 & & \\
 & +\sin^2 pt\cos pt\,x\,\mathfrak{S}_1 & &
\end{array}\right\} = 0
$$

wo die Bedeutung der neu eingeführten Buchstaben folgende ist:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= 4\,a^3\,m\vartheta - 6\,a^3\,\vartheta^2\\
\mathfrak{K}_1 &= \left[8\,a^3\,m - \frac{12\,a^3\,m\vartheta}{n} - 24\,a^3\,\vartheta + \frac{18\,a^3\,\vartheta^2}{n}\right] en\cos nT^0\\
\mathfrak{L} &= -2\,a^4\,m\vartheta - 6\,a^2\,m\vartheta - 4\,a^2\,mh + 6\,a^2\,\vartheta^2\\
&\quad + 12\,a^2\,\vartheta h - 6\,a^2\,ph + 3\,a^4\,p\vartheta + 3\,a^2\,p\vartheta\\
\mathfrak{L}_1 &= \left[\frac{8\,a^4\,m\vartheta}{n} - 4\,a^4\,m + \frac{4\,a^2\,m\vartheta}{n} - 4\,a^2\,m + \frac{8\,a^2\,mh}{n}\right.\\
&\quad + \frac{8\,a^2\,m\vartheta}{n} - 8a^2\,m - \frac{12\,a^2\,\vartheta^2}{n} + 24\,a^2\vartheta - \frac{24\,a^2\,\vartheta h}{n}\\
&\quad + 24\,a^2\,h + 12\,a^2\,ph - \frac{12\,a^4\,p\,\vartheta}{n} + 6\,a^4\,p - \frac{6\,a^2\,p\,\vartheta}{n}\\
&\quad \left. + 6\,a^2 p + 3\,a^4\,n + 3\,a^2\,n\right] en\cos nT^0
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{M} = 2\,a^3\,mh + 6\,amh + 2\,a^3\,m\vartheta + 2\,am\vartheta - 6\,ah^2 - 12\,ah\vartheta$$

$$\mathfrak{M}_1 = \left[-\frac{6\,a^3\,mh}{n} - \frac{2\,amh}{n} - \frac{6\,a^3\,m\vartheta}{n} + 4\,a^3 m - \frac{2\,am\vartheta}{n} + 4\,am - \frac{4\,amh}{n} + \frac{6\,ah^2}{n} + \frac{12\,ah\vartheta}{n} - 24\,ah \right] . \, en \cos nT^0$$

$$\mathfrak{N} = -2\,a^2 mh - 2\,mh + 6\,h^2 + 6\,a^2 ph - 3\,a^4 p\vartheta - 3\,a^2 p\vartheta$$

$$\mathfrak{N}_1 = \left[\frac{4\,a^2\,mh}{n} - \frac{12\,a^2\,ph}{n} + \frac{12\,a^4\,p\vartheta}{n} - 6\,a^4 p + \frac{6\,a^2\,p\vartheta}{n} - 6\,a^2 p - 3\,a^4 n - 3\,a^2 n \right] . \, en \cos nT^0$$

$$\mathfrak{P}_1 = [-2\,a^3 m - 2\,am + 6\,ah + 6\,a^3 n + 6\,a^3 m + 6\,ah]\, en \sin nT^0$$

$$\mathfrak{P}_1{}^0 = +6\,a^2 nh\,(a^2+1)\, en \sin nT^0$$

$$\mathfrak{Q}_1 = [-4\,a^3 m + 12\,a^3 n + 6\,a^3 p + 12\,a^3\vartheta]\, en \sin nT^0$$

$$\mathfrak{Q}_1{}^0 = +12\,a^4 n\vartheta\, e \sin nT^0$$

$$\mathfrak{R}_1 = [2\,a^4 m + 2\,a^2 m + 4\,a^2 m - 12\,a^2 h - 3\,a^4 n - 3\,a^4 m - 6\,a^2 n + 3\,a^4 p - 12\,a^3 n - 12\,a^2\vartheta]\, en \sin nT^0$$

$$\mathfrak{R}_1{}^0 = -6\,a^3 n\,[2h + a^2\vartheta + \vartheta]\, e \sin nT^0$$

$$\mathfrak{T}_1 = 6\,a^3 p\, en \sin nT^0$$

$$\mathfrak{S}_1 = 6\,a^3 n\, e \cos nT^0.$$

Bezeichnet man nun noch kurz in der Gleichung (14):

die erste	Columne	mit X
die zweite	„	„ $-Y(p\delta t + 2eP)$
die dritte	„	„ Y_1
die vierte	„	„ Y_2

so dass man hat:

$$X - Y(p\,\delta t + 2\,e\,P) + Y_1\,e + Y_2\,e = 0$$

so sieht man, wenn man X mit der Gleichung des Kreises vergleicht, unmittelbar, dass $X = 0$ ist, und dass man schliesslich als Endgleichung für die Correktion δt folgenden Ausdruck hat:

$$\delta t = \frac{(Y_1 + Y_2 - 2\,P\,Ye}{p\,Y}.$$

Man sieht hieraus auch sofort, dass für $e = 0$ $\delta t = 0$ wird.

Beispiel: Anahita (270).

Epoche und Osc. 1892. Jan. 26,0
Mittl. Aeq. 1890.

$$L = 122^0\,22'\,34'',3$$
$$M = 150^0\;\;8'\;50'',5$$
$$\omega = \;\;77^0\,46'\;\;0'',5$$
$$\Omega = 254^0\,27'\,43'',3$$
$$i = \;\;\;2^0\,21'\,34'',2$$
$$\varphi = \;\;\;8^0\,37'\,27'',6$$
$$\mu = 1088'',87644$$
$$\lg a = 0{,}3420187$$

Anahita ist im Jahre 1892 am Jan. 29 in Opposition.

Setzt man die Zeit zwischen dem Periheldurchgang und der Epoche $= t_2$, so ist, weil $n = \mu$

$$nt_2 = 150^0\,8'\,50'',5.$$

Somit ergeben die zur Rechnung erforderlichen Grössen folgende Werthe:

$$\lg n'' = 3{,}036979$$
$$\lg (m-n)'' = 3{,}390814$$
$$\lg \vartheta = \lg (m+n)'' = 3{,}666244$$
$$\lg h = \lg (a^2 n + m)'' = 3{,}944905$$
$$ht = +\,103^0\,42'\,21'',7 \qquad t = 152$$
$$t_2 = 496 \qquad t_1 = 499 \qquad T^0 = 651$$
$$nt_1 = 150^0\,55'\,50'',0$$
$$nT^0 = 196^0\,54'\,20'',0$$

$\sin nT^0$	$9{,}463587\,n$
$\cos nT^0$	$9{,}980815\,n$
$\sin pt$	$9{,}987453$
$\cos pt$	$9{,}374639\,n$
$\cos^2 pt$	$8{,}749278$
$\cos^3 pt$	$8{,}123917\,n$

Mit diesen Werthen findet man:

$\mathfrak{K}$	$8{,}826787\,n$	$\mathfrak{K}_1$	$9{,}003965\,n$
$\mathfrak{L}$	$9{,}169714$	$\mathfrak{L}_1$	$9{,}113437$
$\mathfrak{M}$	$8{,}780261\,n$	$\mathfrak{M}_1$	$9{,}219184$
$\mathfrak{N}$	$8{,}370629\,n$	$\mathfrak{N}_1$	$9{,}346248\,n$

$\mathfrak{P}_1 \sin pt$ 8,128291 n
$\mathfrak{Q}_1 \sin pt \cos^2 pt$ 7,103926 n
$\mathfrak{R}_1 \sin pt \cos pt$ 7,783713 n
$\mathfrak{T}_1 \sin^3 pt$ 7,657946 n
$\mathfrak{S}_1 \sin^2 pt \cos pt$ 7,208525

$\mathfrak{P}_1^0 \sin pt$ 8,660858 n
$\mathfrak{Q}_1^0 \sin pt \cos^2 pt$ 7,350799 n
$\mathfrak{R}_1^0 \sin pt \cos pt$ 8,324746 n

$\lg x = 1{,}325120$ $\lg x_0$ 1,165666 n

$\lg Y_1$ 0,766930 n
$\lg Y_2$ 8,839884 n
$\lg Y$ 9,063130 n
$\lg P$ 9,890233
e 9,175962.

Hieraus ergiebt sich für ,

$$\delta t = 11 \text{ Tage.}$$

Mithin haben wir bei der ersten Annäherung:

$$\mathfrak{T} = 152 + 11 = 163 \text{ Tage.}$$

Da aber die zweiten Potenzen der Neigung und Excentricität, sowie der Charakter der Erdbahn als Ellipse vollständig vernachlässigt ist, so wird man schon vermuthen können, dass mit der Rechnung noch nicht der wahre Werth von δt gefunden ist.

Und in der That giebt die folgende Rechnung die wahre kritische Zeit nach der Opposition = 165 Tage. Bildet man nämlich 4 Ephemeridenörter, die der Bedingung genügen, dass das arithmetische Mittel = 165 Tage nach der Opposition ist, so können wir, da die Opposition am Jan. 29 stattfindet, für diese Oerter annehmen:

Juni 17	
Juli 1	das Mittel ist
Juli 15	Juli 12.
August 14	

Nachdem noch die Sonnenörter vermittelst der allgemeinen Präcession auf das mittlere Aequinoctium 1890 bezogen sind, wird sich die Rechnung von ϱ folgendermaassen gestalten.

	Juni 17,0	Juli 1,0
M	193° 23′ 59″,8	197° 38′ 4″,1
E	191° 39′ 47″,0	195° 21′ 31″,8
$\cos \varphi$	9,995062	9,995062
$\sin E$	9,305686 n	9,423022 n
a	0,342019	0,342019
$\cos E - a$	0,052812 n	0,046979 n
$\cos E$	9,990939 n	9,984206 n
$r \sin v$	9,642767 n	9,760103 n
$\sin v$	9,241239 n	9,359430 n
$r \cos v$	0,394831 n	0,388998 n
$\operatorname{tg} v$	9,247936	9,371105
r	0,401528	0,400672
v	190° 2′ 11″,6	193° 13′ 32″,3
$\omega = \pi - \Omega$	77° 46′ 0″,5	77° 46′ 0″,5
u	267° 48′ 12″,1	270° 59′ 32″,8
$\cos u$	8,583530 n	8,238368
r	0,401528	0,400672
$\cos i$	9,999632	0,999632
$\sin u$	9,999681 n	9,999935 n
$r \cos u$	8,985058 n	8,639040
$r \sin u \cos i$	0,400841 n	0,400239 n
L	86° 37′ 25″,9	99° 58′ 38″,9
Ω	254° 27′ 43″,3	254° 27′ 43″,3
$L - \Omega$	192° 9′ 42″,6	205° 30′ 55″,6
$\cos (L - \Omega)$	0,990142 n	9,955432 n
R	0,006991	0,007230
$\sin (L - \Omega)$	9,323610 n	9,634230 n
$R \cos (L - \Omega)$	9,997133 n	9,962662 n
$R \sin (L - \Omega)$	9,330601 n	9,641460 n
$\varrho \cos(\lambda - \Omega) \cos \beta$	0,037442 n	9,941543 n
$\varrho \sin(\lambda - \Omega) \cos \beta$	0,436298 n	0,470007 n

	Juni 17,0	Juli 1,0
$\mathrm{tg}\,(\lambda - \Omega)$	0,398856	0,528464
$\lambda - \Omega$	248° 14′ 24″,8	253° 30′ 9″,0
Ω	254° 27′ 43″,3	254° 27′ 43″,3
λ	142° 42′ 18″,1	147° 57′ 52″,3
	Juli 15,0	August 14,0
M	201° 52′ 8″,4	210° 56′ 34″,7
E	199° 3′ 46″,3	207° 2′ 32″,2
$\cos\varphi$	9,995062	9,995062
$\sin E$	9,514023 n	9,657675 n
a	0,342019	0,342019
$\cos E - a$	0,039460 n	0,017295 n
$\cos E$	9,975506 n	9,949718 n
$r \sin v$	9,851104 n	9,994756 n
$\sin v$	9,451521 n	9,598292 n
$r \cos v$	0,381479 n	0,359314 n
$\mathrm{tg}\, v$	9,469625	9,635442
r	0,399583	0,396464
v	196° 25′ 44″,4	203° 21′ 44″,5
ω	77° 46′ 0″,5	77° 46′ 0″,5
u	274° 11′ 44″,9	281° 7′ 45″,0
$\cos u$	8,864304	9,285606
r	0,399583	0,396464
$\cos i$	0.999632	9,999632
$\sin u$	9,998835 n	9,991755 n
$r \cos u$	9,263887	9,682070
$r \cos i \sin u$	0,398050 n	0,387851 n
L	113° 19′ 18″,8	142° 1′ 48″,2
Ω	254° 27′ 43″,3	254° 27′ 43″,3
$L - \Omega$	218° 51′ 35″,5	247° 34′ 4″,9
$\cos (L - \Omega)$	9,891361 n	9,581593 n
R	0.007057	0,005417
$\sin (L - \Omega)$	9,797557 n	9,965828 n

	Juli 15,0	August 14,0
$R\cos(L-\Omega)$	9,898418 n	9,587010 n
$R\sin(L-\Omega)$	9,804614 n	9,971245 n
$\varrho\cos(\lambda-\Omega)\cos\beta$	9,783785 n	8,975620
$\varrho\sin(\lambda-\Omega)\cos\beta$	0,496699 n	0,528727 n
$\operatorname{tg}(\lambda-\Omega)$	0,712914	1,553107 n
$\lambda-\Omega$	259° 2′ 19″,1	271° 36′ 10″,4
Ω	254° 27′ 43″,3	254° 27′ 43″,3
λ	153° 30′ 2″,4	166° 3′ 53″,7

Die zugehörigen Daten sind:

$\odot$ = 86° 37′ 25″,9	R 0,006991
$\odot_1$ = 99° 58′ 38″,9	R_1 0,007230
$\odot_1^0$ = 113° 19′ 18″,8	R_1^0 0,007057
$\odot_2$ = 142° 1′ 48″,2	R_2 0,005417

Dann erhalten wir:

N 9,910688	n 9,882002
N_2 9,449846	n_2 9,386878
N^0 9,766119	n^0 9,717165
N_2^0 9,738410	n_2^0 9,687115

$\lambda_1 - L$ = 241° 20′ 26″,4	$\sin(\lambda_1 - L)$ 9,943241 n
$\lambda_1 - L_2$ = 185° 56′ 4″,1	$\sin(\lambda_1 - L_2)$ 9,014483 n
$\lambda_1^0 - L$ = 246° 52′ 36″,5	$\sin(\lambda_1^0 - L)$ 9,963629 n
$\lambda_1^0 - L_2$ = 191° 28′ 14″,2	$\sin(\lambda_1^0 - L_2)$ 9,298559 n

und schliesslich:

$$(8{,}844214)\,\varrho + (8{,}879195\,n)\,\varrho_2 = (8{,}702281\,n)$$
$$(8{,}989718)\,\varrho + (9{,}024642\,n)\,\varrho_2 = (8{,}847727\,n)$$
$$(3{,}99)\,\varrho = (2{,}2)$$

Hieraus ist ϱ mit Hülfe einer sechsstelligen Tafel nicht mehr zu berechnen.

Resultat: Das Ergebniss der vorliegenden Untersuchung können wir mithin kurz dahin zusammenfassen, dass erstens eine

erste Bahnbestimmung unter der Bedingung, dass die Beobachtungen in der Gegend der Opposition stattgefunden haben, mit keinen relativ grossen Unsicherheiten behaftet ist. Zweitens existirt (cf. p. 20) eine Anzahl kleiner Planeten, für welche es einen kritischen Tag überhaupt nicht giebt, so dass für dieselben eine Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen unter allen Umständen möglich ist.

Thesen.

I.

Es ist von Wichtigkeit, die Jupitermasse auch aus den Jupiterstörungen der kleinen Planeten und der periodischen Cometen zu bestimmen und zwar wird dieselbe sicherer aus den ersteren abgeleitet werden können.

II.

Die Klinkerfues'sche Erklärung der Ursache des veränderlichen Lichtes bei Sternen der III. Spektralklasse ist unzulässig.

III.

Das Lambert'sche Gesetz über die Beleuchtung der grossen Planeten kann höchstens als erste Annäherung betrachtet werden.

Vita.

Natus sum, Joannes Paetsch, Berolini anno MDCCCLXIV Non. Jul. patre Guilelmo, medico apud Berolinenses practico, regi a consiliis sanitatis intimis. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum rudimentis in schola privata imbutus per septem annos discipulus fui gymnasii Berolinensis Luisiani, directore Theodoro Kock, viro illustrissimo, deinde per unum annum gymnasium in urbe Gartz, quod auspiciis directoris Vitz, viri praeclarissimi floret, frequentavi. Inde dimissus cum testimonio maturitatis universitatem Berolinensem adii, ubi per septies sex menses studiis et mathematicis et astronomicis operam dedi. Tum per unum semestre in universitate litterarum Argentorati versatus, iterum in civium academicorum numerum almae universitatis Berolinensis Fridericae Guilelmae a rectore magnifico Tobler, viro illustrissimo, receptus sum, ubi iisdem quibus antea studiis operam dedi.

Argentorati scholis interfui praeceptorum clarissimorum: Becker, Kobold, Wiener, Wislicenus.

Berolini: de Bezold, Dilthey, Foerster, Fuchs, Helmert, Hensel, Hettner, Knoblauch, Kötter, Kundt, Lehmann-Filhés, Neesen, Netto, Planck, Thiesen, Tietjen, Weinstein.

Quibus viris omnibus, inprimis autem viris praeclarissimis Foerster et Tietjen, optime de me meritis, ex animi sententia gratias ago semperque habebo quam maximas.